第 57 卷　第 2 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 57　No. 2
2018 年　3 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Mar.　2018

DOI：10.13471/j.cnki.acta.snus.2018.02.011

一类限位排列的计数*

唐善刚
（西华师范大学数学与信息学院，四川 南充 637009）

摘　要：限位排列是组合计数的一个重要研究内容，应用容斥原理等组合分析技巧研究一类限位排列的计数问题，具体给出了计算此类限位排列数的计数方法和计数公式，拓广了已有文献的研究结果。最后，提出有待进一步研究的限位排列的计数问题。

关键词：容斥原理；限位排列；环形排列；计数公式

中图分类号：O157.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2018）02－0080－07

Enumerating formulas for a class of restricted permutation

TANG Shangang
(School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: Restricted permutation is considered as important study in combinatorial enumeration. A class of enumerating problems for restricted permutation is studied by using principle of inclusion-exclusion and other combinatorial analysis methods. Some enumerating methods and enumerating formulas for restricted permutation are obtained. These results generalize some known results. Finally, enumerating problem of restricted permutation for future study is given.

Key words: principle of inclusion-exclusion; restricted permutation; circular permutation; enumerating formula

$\mathbf{Z}$ 表示整数集，a 是正整数，令 $[1,a]=\{1,2,\cdots,a\}$。设 m 为正整数，整数 $n_s\geqslant 2(1\leqslant s\leqslant m)$，$\sum_{s=1}^{m}n_s=n$。限位排列是组合计数的一个重要研究内容，相关方面的研究见文献［1－5］，设 $d_s\in\mathbf{Z}$，n_s 不整除 d_s，e_s 与 e'_s 是非负整数，且 $e_s\leqslant e'_s\leqslant n_s(1\leqslant s\leqslant m)$，设 ϕ 是 $[1,n]$ 上的全排列（也称之为置换），对于如下的 m 个阵列：

$$\underbrace{\begin{matrix} \sum_{q=1}^{s-1}n_q+1 & \sum_{q=1}^{s-1}n_q+2 & \cdots & \sum_{q=1}^{s-1}n_q+n_s \\ \sum_{q=1}^{s-1}n_q+\lambda_{1+d_s} & \sum_{q=1}^{s-1}n_q+\lambda_{2+d_s} & \cdots & \sum_{q=1}^{s-1}n_q+\lambda_{n_s+d_s} \\ \phi(\sum_{q=1}^{s-1}n_q+1) & \phi(\sum_{q=1}^{s-1}n_q+2) & \cdots & \phi(\sum_{q=1}^{s}n_q) \end{matrix}}_{\text{第}s\text{个阵列}} \tag{1}$$

其中约定 $\sum_{q=1}^{0}n_q=0$，$\lambda_{u_s+d_s}$ 是 u_s+d_s 除以 n_s 的最小正剩余数，$u_s\in[1,n_s]$，$1\leqslant s\leqslant m$。

研究限位排列数的基本方法是棋盘与棋子多项式[5-6]，本文利用容斥原理的计数方法[3-5,7-13]、有限集合上封闭集族的计数方法与其它组合分析技巧的结合研究在阵列（1）下的 $[1,n]$ 上的如下限位排列的计数[14]。

问题Ⅰ　求 $[1,n]$ 上使得阵列（1）中的第 s 个阵列中至少有 e_s 个列，至多有 e'_s 个列，它们中的任意列都有相同的数（$1\leqslant s\leqslant m$）的全排列 ϕ 的个数。

设 A 表示 $[1,n]$ 上的所有全排列组成的集合，对任意 $B\subseteq A$，令 $f(B)$ 表示集合 B 的元素个数。对于 $\phi\in A$，$u_s\in[1,n_s]$，界定与 ϕ 有关的命题 $P_{su_s}(\phi)$ 为：

* **收稿日期：**2017－05－16
基金项目：四川省教育厅自然科学重点项目（17ZA0383）；国家自然科学基金（11401480）
作者简介：唐善刚（1978 年生），男；**研究方向：**组合数学；E-mail：tangshangang2001@163.com

$$P_{su_s}:\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + u_s\right) = \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{u_s+d_s} \text{ 或 } \sum_{q=1}^{s-1} n_q + u_s$$

其中 $1 \leqslant s \leqslant m$。

令

$$A_{su_s} = \{\phi \in A \mid P_{su_s}(\phi)\},\bar{A}_{su_s} = \{\phi \in A \mid \phi \notin A_{su_s}\}$$

设 $I_s \subseteq [1,n_s]$，令

$$A_{I_s} = \bigcap_{u_s \in I_s} A_{su_s},\ A_{(I_s)} = \bigcap_{u_s \in [1,n_s]-I_s} \bar{A}_{su_s} \cap A_{I_s}$$

其中 $[1,n_s] - I_s$ 表示 $[1,n_s]$ 与 I_s 的差集，且约定 $\bigcap_{u_s \in \varnothing} A_{su_s} = A$，$\bigcap_{u_s \in \varnothing} \bar{A}_{su_s} = A$。

设

$$A_{(e_s,e'_s)} = \bigcup_{\substack{I_s \subseteq [1,n_s] \\ e_s \leqslant |I_s| \leqslant e'_s}} A_{(I_s)}$$

非负整数 $l < k$ 时，约定

$$\bigcap_{s=k}^{l} A_{I_s} = \bigcap_{s=k}^{l} A_{(I_s)} = \bigcap_{s=k}^{l} A_{(e_s,e'_s)} = A$$

于是，$f(\bigcap_{s=1}^{m} A_{(e_s,e'_s)})$ 即为问题 I 对应的限位排列的计数解。对于任意的非负整数 $t_s \leqslant n_s(1 \leqslant s \leqslant m)$，用如下的式子来定义 $f_{t_1,\cdots,t_m}$ 为：

$$f_{t_1,\cdots,t_m} = \sum_{\substack{I_s \subseteq [1,n_s] \\ |I_s| = t_s \\ 1 \leqslant s \leqslant m}} f\left(\bigcap_{s=1}^{m} A_{I_s}\right)$$

本文要用到文献［8］的一个组合恒等式，即下面的引理 1。

引理 1　对于非负整数 d,s,t，且 $s \leqslant t$，令

$$\sum_{r=s}^{t} (-1)^{d-r}\binom{d}{r} = \xi_{(s,t,d)}$$

则有

$$\xi_{(s,t,d)} = (-1)^{d-t}\binom{d-1}{t} + (-1)^{d-s}\binom{d-1}{s-1}$$

其中约定：$\binom{-1}{-1} = 0$；$\binom{x}{y} = 0, y > x \geqslant 0$；$\binom{-1}{x} = (-1)^x, x \geqslant 0$；$\binom{x}{0} = 1, x \geqslant 0$；$\binom{x}{y} = 0, x \geqslant 0 > y$。

1　$f_{t_1,\cdots,t_m}$ 的显式计算公式

根据容斥原理的计数原理[3-5, 7-13]，求 $f(\bigcap_{s=1}^{m} A_{(e_s,e'_s)})$ 的计数公式，关键在于 $f_{t_1,\cdots,t_m}$ 的显式计算公式。

定理 1　对于任意的非负整数 $t_s \leqslant n_s(1 \leqslant s \leqslant m)$，则有

$$f_{t_1,\cdots,t_m} = \left(n - \sum_{s=1}^{m} t_s\right)! \cdot \prod_{s=1}^{m} \sum_{\substack{0 \leqslant k_{\alpha_s} \leqslant \eta_s \\ \sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} k_{\alpha_s} = t_s}} \prod_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} \frac{2\eta_s}{2\eta_s - k_{\alpha_s}}\binom{2\eta_s - k_{\alpha_s}}{k_{\alpha_s}} \tag{2}$$

其中 (n_s,d_s) 表示 n_s 与 d_s 的最大公约数，$\eta_s = \dfrac{n_s}{(n_s,d_s)}$，$1 \leqslant s \leqslant m$。

证明　具体分为 3 个步骤来完成式（2）的证明。

步骤 1　设 σ_s 是 $[1,n_s]$ 上的置换，且 $\sigma_s(u_s) = \lambda_{u_s+d_s}$，$u_s \in [1,n_s]$。根据置换的轮换分解[15]，$\sigma_s$ 恰好分解为 (n_s,d_s) 个两两互不相交的 η_s - 轮换的乘积，由初等数论知识，不难证明 σ_s 的 η_s - 轮换分解为：

$$\sigma_s = \prod_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} (\alpha_s,\lambda_{\alpha_s+d_s},\lambda_{\alpha_s+2d_s},\cdots,\lambda_{\alpha_s+(\eta_s-1)d_s}) \tag{3}$$

其中 (n_s,d_s) 表示 n_s 与 d_s 的最大公约数，$\eta_s = \dfrac{n_s}{(n_s,d_s)}$，对任意 $x \in \mathbf{Z}$，$\lambda_{\alpha_s+xd_s}$ 是 $\alpha_s + xd_s$ 除以 n_s 的最小正剩余数。

于是，阵列（1）基于式（3）的表示为：

$$\underbrace{\begin{matrix} \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \alpha_s & \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+d_s} & \cdots & \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(\eta_s-1)d_s} \\ \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+d_s} & \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+2d_s} & \cdots & \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \alpha_s \\ \phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \alpha_s\right) & \phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+d_s}\right) & \cdots & \phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(\eta_s-1)d_s}\right) \end{matrix}}_{\text{第}s\text{个阵列}} \tag{4}$$

其中 $1 \leqslant \alpha_s \leqslant (n_s,d_s)$，$1 \leqslant s \leqslant m$。

根据阵列（4）与式（3），界定如下的环形排列：

$$\odot b_{\alpha_{s1}} b_{\alpha_{s1}} b_{\alpha_{s2}} b_{\alpha_{s2}} \cdots b_{\alpha_{s(\eta_s-1)}} b_{\alpha_{s(\eta_s-1)}} b_{\alpha_{s\eta_s}} b_{\alpha_{s\eta_s}} \tag{5}$$

其中 $b_{\alpha_{sj}} = \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j-1)d_s}$，$j \in \mathbf{Z}$，$1 \leqslant \alpha_s \leqslant (n_s,d_s)$，$1 \leqslant s \leqslant m$。

对于环形排列（5）中任意取定的元素 $b_{\alpha_{sj}}$，对

于 $\phi \in A$，根据阵列（4）与环形排列（5），界定与 ϕ 有关的命题 $P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{s(j+1)}}}(\phi)$ 与 $P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{sj}}}(\phi)$ 为：

$P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{s(j+1)}}}(\phi)$：$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j-1)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj}}$，当环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{s(j+1)}}$。

$P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{sj}}}(\phi)$：$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j-2)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj}}$，当环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{sj}}$。

令

$$A_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{s(j+1)}}} = \left\{\phi \in A \mid P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{s(j+1)}}}(\phi)\right\},$$

$$A_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{sj}}} = \left\{\phi \in A \mid P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{sj}}}(\phi)\right\}$$

其中 $j \in \mathbf{Z}$，$1 \leqslant \alpha_s \leqslant (n_s, d_s)$，$1 \leqslant s \leqslant m$。

步骤 2 在这个步骤中，我们需要证明几个辅助的引理。

根据命题 $P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{s(j+1)}}}$、$P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{sj}}}$、$P_{s\lambda_{\alpha_s+(j-1)d_s}}$ 与 $P_{s\lambda_{\alpha_s+(j-2)d_s}}$ 的界定，显然有如下的引理 2 成立。

引理 2 对于 $\phi \in A$，对于环形排列（5）中任意取定的元素 $b_{\alpha_{sj}}$，若命题 $P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{s(j+1)}}}(\phi)$ 成立，则命题 $P_{s\lambda_{\alpha_s+(j-1)d_s}}(\phi)$ 成立；若命题 $P_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{sj}}}(\phi)$ 成立，则命题 $P_{s\lambda_{\alpha_s+(j-2)d_s}}(\phi)$ 成立。且

$$A_{s\lambda_{\alpha_s+(j-1)d_s}} = A_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{s(j+1)}}} \cup A_{b_{\alpha_{s(j+1)}},b_{\alpha_{s(j+1)}}},$$
$$A_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{s(j+1)}}} \cap A_{b_{\alpha_{s(j+1)}},b_{\alpha_{s(j+1)}}} = \varnothing;$$
$$A_{s\lambda_{\alpha_s+(j-2)d_s}} = A_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{sj}}} \cup A_{b_{\alpha_{s(j-1)}},b_{\alpha_{sj}}},$$
$$A_{b_{\alpha_{sj}},b_{\alpha_{sj}}} \cap A_{b_{\alpha_{s(j-1)}},b_{\alpha_{sj}}} = \varnothing$$

引理 3 从环形排列（5）中选取两个不相邻的元素 $b_{\alpha_{sj_1}}$ 与 $b_{\alpha_{sj_2}}$，设环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj_1}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{s(h_1+2)}}$，环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj_2}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{s(h_2+2)}}$，对于 $\phi \in A$，若命题 $P_{b_{\alpha_{sj_1}},b_{\alpha_{s(h_1+2)}}}(\phi)$ 与 $P_{b_{\alpha_{sj_2}},b_{\alpha_{s(h_2+2)}}}(\phi)$ 成立，则命题 $P_{s\lambda_{\alpha_s+h_1d_s}}(\phi)$ 与 $P_{s\lambda_{\alpha_s+h_2d_s}}(\phi)$ 成立，且

$$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_1d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_1}},$$

$$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_2d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_2}},$$

$$\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_1d_s} \neq \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_2d_s}$$

证 明 由引理 2，命题 $P_{s\lambda_{\alpha_s+h_1d_s}}(\phi)$ 与 $P_{s\lambda_{\alpha_s+h_2d_s}}(\phi)$ 成立，且有

$$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_1d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_1}},$$

$$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_2d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_2}}$$

由环形排列（5），$b_{\alpha_{s(h_1+2)}} = b_{\alpha_{s(j_1+1)}}$ 或 $b_{\alpha_{sj_1}}$；$b_{\alpha_{s(h_2+2)}} = b_{\alpha_{s(j_2+1)}}$ 或 $b_{\alpha_{sj_2}}$，从而

$$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_1d_s}\right) =$$

$$\begin{cases} \phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-1)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_1}}, b_{\alpha_{s(h_1+2)}} = b_{\alpha_{s(j_1+1)}} \\ \phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-2)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_1}}, b_{\alpha_{s(h_1+2)}} = b_{\alpha_{sj_1}} \end{cases};$$

$$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_2d_s}\right) =$$

$$\begin{cases} \phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-1)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_2}}, b_{\alpha_{s(h_2+2)}} = b_{\alpha_{s(j_2+1)}} \\ \phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-2)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_2}}, b_{\alpha_{s(h_2+2)}} = b_{\alpha_{sj_2}} \end{cases}$$

由于 $b_{\alpha_{sj_1}}$ 与 $b_{\alpha_{sj_2}}$ 在环形排列（5）中是不相邻的，则 $b_{\alpha_{sj_1}} \neq b_{\alpha_{sj_2}}$，也即 η_s 不整除 $j_1 - j_2$。

（ⅰ）当 $\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-1)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_1}}$，$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-1)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_2}}$。根据 η_s 不整除 $j_1 - j_2$，即得

$$\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-1)d_s} \neq \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-1)d_s}$$

（ⅱ）当 $\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-2)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_1}}$，$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-2)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_2}}$。根据 η_s 不整除 $j_1 - j_2$，即得

$$\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-2)d_s} \neq \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-2)d_s}$$

（ⅲ）当 $\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-1)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_1}}$，$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-2)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_2}}$。

若 $\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-1)d_s} = \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-2)d_s}$，也即 η_s 整除 $1 + j_1 - j_2$，从而 $b_{\alpha_{sj_2}} = b_{\alpha_{s(j_1+1)}}$。由引理 2，在环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj_1}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{sj_2}}$，以及环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj_2}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{sj_2}}$，从而导致 $b_{\alpha_{sj_1}}$ 与 $b_{\alpha_{sj_2}}$ 在环形排列（5）中是相邻的矛盾，故

$$\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-1)d_s} \neq \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-2)d_s}$$

（ⅳ）当 $\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-2)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_1}}$，

$$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-1)d_s}\right) = b_{\alpha_{sj_2}}。$$

若 $\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-2)d_s} = \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-1)d_s}$，也即 η_s 整除 $1+j_2-j_1$，从而 $b_{\alpha_{sj_1}} = b_{\alpha_{s(j_2+1)}}$。根据引理2，在环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj_2}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{sj_1}}$，以及环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj_1}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{sj_1}}$，从而导致 $b_{\alpha_{sj_2}}$ 与 $b_{\alpha_{sj_1}}$ 在环形排列（5）中是相邻的矛盾，故

$$\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_1-2)d_s} \neq \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+(j_2-1)d_s}$$

综上情况（i）–（iv）所述，即得

$$\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_1d_s} \neq \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_2d_s}$$

由引理3，即得下面的引理4。

引理4 设从环形排列（5）中选取 k_{α_s} 个两两不相邻的元素为 $b_{\alpha_{sj_v}}(1\leqslant v\leqslant k_{\alpha_s})$，不妨设环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj_v}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{s(h_v+2)}}(1\leqslant v\leqslant k_{\alpha_s})$，对于 $\phi\in A$，若命题 $P_{b_{\alpha_{sj_v}},b_{\alpha_{s(h_v+2)}}}(\phi)$ 成立 $(1\leqslant v\leqslant k_{\alpha_s})$，则命题 $P_{s\lambda_{\alpha_s+h_vd_s}}(\phi)$ 成立 $(1\leqslant v\leqslant k_{\alpha_s})$，且

$$\phi\left(\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_vd_s}\right) = b_{\alpha_{sj_v}},1\leqslant v\leqslant k_{\alpha_s};$$

$$\sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_xd_s} \neq \sum_{q=1}^{s-1} n_q + \lambda_{\alpha_s+h_yd_s},1\leqslant x,\ y\leqslant k_{\alpha_s},x\neq y;$$

$$f\left(\bigcap_{s=1}^{m}\bigcap_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}\bigcap_{v=1}^{k_{\alpha_s}} A_{b_{\alpha_{sj_v}},b_{\alpha_{s(h_v+2)}}}\right) = \left(n-\sum_{s=1}^{m}\sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} k_{\alpha_s}\right)! \tag{6}$$

注1 当 $k_{\alpha_s}=0$ 时，约定 $\bigcap_{v=1}^{k_{\alpha_s}} A_{b_{\alpha_{sj_v}},b_{\alpha_{s(h_v+2)}}} = A$，式（6）也成立。

步骤3 以下均约定 $\{b_{\alpha_{sj_v}}\mid 1\leqslant v\leqslant k_{\alpha_s}\}$ 代表的是从环形排列（5）中任意选取 k_{α_s} 个两两不相邻的元素的组合，且约定环形排列（5）中与 $b_{\alpha_{sj_v}}$ 右相邻的元素为 $b_{\alpha_{s(h_v+2)}}$，其中 $1\leqslant v\leqslant k_{\alpha_s}$，$1\leqslant\alpha_s\leqslant(n_s,d_s)$，$1\leqslant s\leqslant m$。由文献［5，16］，这样的组合 $\{b_{\alpha_{sj_v}}\mid 1\leqslant v\leqslant k_{\alpha_s}\}$ 的个数为：

$$\frac{2\eta_s}{2\eta_s-k_{\alpha_s}}\binom{2\eta_s-k_{\alpha_s}}{k_{\alpha_s}},1\leqslant k_{\alpha_s}\leqslant\eta_s \tag{7}$$

注2 约定从环形排列（5）中选取0个两两不相邻的元素的组合的个数为1，则式（7）对 $k_{\alpha_s}=0$ 也成立。

于是，根据式（6）、式（7）以及引理2与引理4，当 $0\leqslant k_{\alpha_s}\leqslant\eta_s(1\leqslant\alpha_s\leqslant(n_s,d_s),1\leqslant s\leqslant m)$ 时，即得

$$\sum_{\substack{I_{\alpha_s}\subseteq\{\lambda_{\alpha_s+xd_s}\mid x\in\mathbf{Z}\}\subseteq[1,n_s]\\ |I_{\alpha_s}|=k_{\alpha_s}\\ 1\leqslant\alpha_s\leqslant(n_s,d_s)\\ 1\leqslant s\leqslant m}} f\left(\bigcap_{s=1}^{m}\bigcap_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} A_{I_{\alpha_s}}\right) = \sum_{\substack{\{b_{\alpha_{sj_v}}\mid 1\leqslant v\leqslant k_{\alpha_s}\}\\ 1\leqslant\alpha_s\leqslant(n_s,d_s)\\ 1\leqslant s\leqslant m}} f\left(\bigcap_{s=1}^{m}\bigcap_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}\bigcap_{v=1}^{k_{\alpha_s}} A_{b_{\alpha_{sj_v}},b_{\alpha_{s(h_v+2)}}}\right) =$$

$$\left(n-\sum_{s=1}^{m}\sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} k_{\alpha_s}\right)!\prod_{s=1}^{m}\prod_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}\frac{2\eta_s}{2\eta_s-k_{\alpha_s}}\binom{2\eta_s-k_{\alpha_s}}{k_{\alpha_s}} \tag{8}$$

对任意的非负整数 $t_s\leqslant n_s(1\leqslant s\leqslant m)$，令 $\sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} k_{\alpha_s} = t_s(1\leqslant s\leqslant m)$，由式（8），即得

$$f_{t_1,\cdots,t_m} = \sum_{\substack{0\leqslant k_{\alpha_s}\leqslant\eta_s\\ \sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} k_{s_i}=t_s\\ 1\leqslant s\leqslant m}}\ \sum_{\substack{I_{\alpha_s}\subseteq\{\lambda_{\alpha_s+xd_s}\mid x\in\mathbf{Z}\}\subseteq[1,n_s]\\ |I_{\alpha_s}|=k_{\alpha_s}\\ 1\leqslant\alpha_s\leqslant(n_s,d_s)\\ 1\leqslant s\leqslant m}} f\left(\bigcap_{s=1}^{m}\bigcap_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} A_{I_{\alpha_s}}\right) =$$

$$\left(n-\sum_{s=1}^{m} t_s\right)!\prod_{s=1}^{m}\sum_{\substack{0\leqslant k_{\alpha_s}\leqslant\eta_s\\ \sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} k_{\alpha_s}=t_s}}\prod_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}\frac{2\eta_s}{2\eta_s-k_{\alpha_s}}\binom{2\eta_s-k_{\alpha_s}}{k_{\alpha_s}}$$

至此，式（2）成立。证毕。

2 主要结果

定理2 ［$1,n$］上使得阵列（1）中的第 s 个阵列中至少有 e_s 个列，至多有 e'_s 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1\leqslant s\leqslant m)$ 的全排列 ϕ 的个数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\ 1\leqslant s\leqslant m}}\left(n-\sum_{s=1}^{m} t_s\right)!\prod_{s=1}^{m}\xi_{(e_s,e'_s,t_s)}\cdot$$

$$\prod_{s=1}^{m}\sum_{\substack{0\leqslant k_{\alpha_s}\leqslant\eta_s\\ \sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)} k_{\alpha_s}=t_s}}\prod_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}\frac{2\eta_s}{2\eta_s-k_{\alpha_s}}\binom{2\eta_s-k_{\alpha_s}}{k_{\alpha_s}} \tag{9}$$

证明 根据容斥原理[8]，可得

$$f\left(\bigcap_{s=1}^{m} A_{(e_s,e'_s)}\right) = \sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\ 1\leqslant s\leqslant m}}\prod_{s=1}^{m}\xi_{(e_s,e'_s,t_s)}f_{t_1,\cdots,t_m} \tag{10}$$

将式（2）代入式（10）即得式（9）。证毕。

当式（9）中 $e_i=0(1\leqslant i\leqslant k)$，$e_j=e'_j(k+1\leqslant j\leqslant m)$ 时，即得

推论1 对任意非负整数 $r_s\leqslant n_s(1\leqslant s\leqslant m)$，则［$1,n$］上使得阵列（1）中的第 i 个阵列中至多有 r_i 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1\leqslant i\leqslant k)$，而第 j 个阵列中恰好有 r_j 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1+k\leqslant j\leqslant m)$ 的全排列 ϕ 的个

数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\1\leqslant s\leqslant m}}(-1)^{\sum_{s=1}^{m}(t_s-r_s)}$$

$$\left(n-\sum_{s=1}^{m}t_s\right)!\prod_{s=1}^{k}\binom{t_s-1}{r_s}\prod_{s=k+1}^{m}\binom{t_s}{r_s}\cdot$$

$$\prod_{s=1}^{m}\sum_{\substack{0\leqslant k_{\alpha_s}\leqslant\eta_s\\\sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}k_{\alpha_s}=t_s}}\prod_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}\frac{2\eta_s}{2\eta_s-k_{\alpha_s}}\binom{2\eta_s-k_{\alpha_s}}{k_{\alpha_s}}\quad(11)$$

当式（9）中 $e'_i=n_i(1\leqslant i\leqslant k),e_j=e'_j(k+1\leqslant j\leqslant m)$ 时，即得

推论 2 对任意非负整数 $r_s\leqslant n_s(1\leqslant s\leqslant m)$，则 $[1,n]$ 上使得阵列（1）中的第 i 个阵列中至少有 r_i 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1\leqslant i\leqslant k)$，而第 j 个阵列中恰好有 r_j 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1+k\leqslant j\leqslant m)$ 的全排列 ϕ 的个数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\1\leqslant s\leqslant m}}(-1)^{\sum_{s=k+1}^{m}(t_s-r_s)}\left(n-\sum_{s=1}^{m}t_s\right)!\prod_{s=1}^{k}\xi_{(r_s,n_s,t_s)}\prod_{s=k+1}^{m}\binom{t_s}{r_s}\cdot$$

$$\prod_{s=1}^{m}\sum_{\substack{0\leqslant k_{\alpha_s}\leqslant\eta_s\\\sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}k_{\alpha_s}=t_s}}\prod_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}\frac{2\eta_s}{2\eta_s-k_{\alpha_s}}\binom{2\eta_s-k_{\alpha_s}}{k_{\alpha_s}}\quad(12)$$

当式（9）中 $e_i=0(1\leqslant i\leqslant k),e'_j=n_j(k+1\leqslant j\leqslant m)$ 时，即得

推论 3 对任意非负整数 $r_s\leqslant n_s(1\leqslant s\leqslant m)$，则 $[1,n]$ 上使得阵列（1）中的第 i 个阵列中至多有 r_i 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1\leqslant i\leqslant k)$，而第 j 个阵列中至少有 r_j 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1+k\leqslant j\leqslant m)$ 的全排列 ϕ 的个数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\1\leqslant s\leqslant m}}(-1)^{\sum_{s=1}^{k}(t_s-r_s)}\left(n-\sum_{s=1}^{m}t_s\right)!\cdot$$

$$\prod_{s=1}^{k}\binom{t_s-1}{r_s}\prod_{s=k+1}^{m}\xi_{(r_s,n_s,t_s)}\cdot$$

$$\prod_{s=1}^{m}\sum_{\substack{0\leqslant k_{\alpha_s}\leqslant\eta_s\\\sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}k_{\alpha_s}=t_s}}\prod_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}\frac{2\eta_s}{2\eta_s-k_{\alpha_s}}\binom{2\eta_s-k_{\alpha_s}}{k_{\alpha_s}}\quad(13)$$

当式（9）中 $e'_s=0(1\leqslant s\leqslant m)$ 时，即得

推论 4 $[1,n]$ 上使得阵列（1）中的任意列都没有相同的数的全排列 ϕ 的个数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\1\leqslant s\leqslant m}}(-1)^{\sum_{s=1}^{m}t_s}\left(n-\sum_{s=1}^{m}t_s\right)!\cdot$$

$$\prod_{s=1}^{m}\sum_{\substack{0\leqslant k_{\alpha_s}\leqslant\eta_s\\\sum_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}k_{\alpha_s}=t_s}}\prod_{\alpha_s=1}^{(n_s,d_s)}\frac{2\eta_s}{2\eta_s-k_{\alpha_s}}\binom{2\eta_s-k_{\alpha_s}}{k_{\alpha_s}}\quad(14)$$

推论 5 当 $(n_s,d_s)=1(1\leqslant s\leqslant m)$ 时，$[1,n]$ 上使得阵列（1）中的第 s 个阵列中至少有 e_s 个列，至多有 e'_s 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1\leqslant s\leqslant m)$ 的全排列 ϕ 的个数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\1\leqslant s\leqslant m}}\left(n-\sum_{s=1}^{m}t_s\right)!\prod_{s=1}^{m}\xi_{(e_s,e'_s,t_s)}\prod_{s=1}^{m}\frac{2n_s}{2n_s-t_s}\binom{2n_s-t_s}{t_s}\quad(15)$$

推论 6 当 $(n_s,d_s)=1(1\leqslant s\leqslant m)$ 时，对任意非负整数 $r_s\leqslant n_s(1\leqslant s\leqslant m)$，则 $[1,n]$ 上使得阵列（1）中的第 i 个阵列中至多有 r_i 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1\leqslant i\leqslant k)$，而第 j 个阵列中恰好有 r_j 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1+k\leqslant j\leqslant m)$ 的全排列 ϕ 的个数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\1\leqslant s\leqslant m}}(-1)^{\sum_{s=1}^{m}(t_s-r_s)}\left(n-\sum_{s=1}^{m}t_s\right)!\cdot$$

$$\prod_{s=1}^{k}\binom{t_s-1}{r_s}\prod_{s=k+1}^{m}\binom{t_s}{r_s}\prod_{s=1}^{m}\frac{2n_s}{2n_s-t_s}\binom{2n_s-t_s}{t_s}\quad(16)$$

推论 7 当 $(n_s,d_s)=1(1\leqslant s\leqslant m)$ 时，对任意非负整数 $r_s\leqslant n_s(1\leqslant s\leqslant m)$，则 $[1,n]$ 上使得阵列（1）中的第 i 个阵列中至少有 r_i 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1\leqslant i\leqslant k)$，而第 j 个阵列中恰好有 r_j 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1+k\leqslant j\leqslant m)$ 的全排列 ϕ 的个数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\1\leqslant s\leqslant m}}(-1)^{\sum_{s=k+1}^{m}(t_s-r_s)}\left(n-\sum_{s=1}^{m}t_s\right)!\cdot$$

$$\prod_{s=1}^{k}\xi_{(r_s,n_s,t_s)}\prod_{s=k+1}^{m}\binom{t_s}{r_s}\prod_{s=1}^{m}\frac{2n_s}{2n_s-t_s}\binom{2n_s-t_s}{t_s}\quad(17)$$

推论 8 当 $(n_s,d_s)=1(1\leqslant s\leqslant m)$ 时，对任意非负整数 $r_s\leqslant n_s(1\leqslant s\leqslant m)$，则 $[1,n]$ 上使得阵列（1）中的第 i 个阵列中至多有 r_i 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1\leqslant i\leqslant k)$，而第 j 个阵列中至少有 r_j 个列，它们中的任意列都有相同的数 $(1+k\leqslant j\leqslant m)$ 的全排列 ϕ 的个数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\1\leqslant s\leqslant m}}(-1)^{\sum_{s=1}^{k}(t_s-r_s)}\left(n-\sum_{s=1}^{m}t_s\right)!\prod_{s=1}^{k}\binom{t_s-1}{r_s}\cdot$$

$$\prod_{s=k+1}^{m}\xi_{(r_s,n_s,t_s)}\prod_{s=1}^{m}\frac{2n_s}{2n_s-t_s}\binom{2n_s-t_s}{t_s}\quad(18)$$

推论 9 当 $(n_s,d_s)=1(1\leqslant s\leqslant m)$ 时，$[1,n]$ 上使得阵列（1）中的任意列都没有相同的数的全排列 ϕ 的个数为：

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_s\leqslant n_s\\1\leqslant s\leqslant m}}(-1)^{\sum_{s=1}^{m}t_s}\left(n-\sum_{s=1}^{m}t_s\right)!\prod_{s=1}^{m}\frac{2n_s}{2n_s-t_s}\binom{2n_s-t_s}{t_s}\tag{19}$$

注 3　式（17）推广了文献［3］的结果，文献［4］试图推广文献［3］的结果，但文献［4］的结果被证明是错误的[7]，式（17）是对文献［4］的错误结果的改正与推广，式（9）则是对阵列（1）中的 $n_s > (n_s, d_s) \geqslant 1(1 \leqslant s \leqslant m)$ 情形下的结果的统一回答。

3　讨　论

m 是正整数，整数 $n_s \geqslant 2$，$d_s \in \mathbf{Z}$，n_s 不整除 d_s，e_s 与 e'_s 是非负整数，且 $e_s \leqslant e'_s \leqslant n_s(1 \leqslant s \leqslant m)$，$\sum_{s=1}^{m} n_s = n$。设 ϕ 是［$1,n$］上的全排列（也称之为置换），对于如下的 m 个阵列

$$\underbrace{\begin{array}{cccc}
\sum_{q=1}^{s-1} n_q+1 & \sum_{q=1}^{s-1} n_q+2 & \cdots & \sum_{q=1}^{s-1} n_q+n_s\\
\sum_{q=1}^{s-1} n_q+\lambda_{1+d_s} & \sum_{q=1}^{s-1} n_q+\lambda_{2+d_s} & \cdots & \sum_{q=1}^{s-1} n_q+\lambda_{n_s+d_s}\\
\sum_{q=1}^{s-1} n_q+\lambda_{1+2d_s} & \sum_{q=1}^{s-1} n_q+\lambda_{2+2d_s} & \cdots & \sum_{q=1}^{s-1} n_q+\lambda_{n_s+2d_s}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\sum_{q=1}^{s-1} n_q+\lambda_{1+\delta_s d_s} & \sum_{q=1}^{s-1} n_q+\lambda_{2+\delta_s d_s} & \cdots & \sum_{q=1}^{s-1} n_q+\lambda_{n_s+\delta_s d_s}\\
\phi(\sum_{q=1}^{s-1} n_q+1) & \phi(\sum_{q=1}^{s-1} n_q+2) & \cdots & \phi(\sum_{q=1}^{s} n_q)
\end{array}}_{\text{第}s\text{个阵列}}\tag{20}$$

其中约定 $\sum_{q=1}^{0} n_q = 0$，$\lambda_{u_s+xd_s}$ 是 $u_s + xd_s$ 除以 n_s 的最小正剩余数，$u_s \in [1,n_s]$，$x \in \mathbf{Z}$。(n_s,d_s) 表示 n_s 与 d_s 的最大公约数，$\eta_s = \dfrac{n_s}{(n_s,d_s)}$，$\delta_s \in \mathbf{Z}$，且 $0 < \delta_s < \eta_s$，$1 \leqslant s \leqslant m$。

问题Ⅱ　求［$1,n$］上使得阵列（20）中的第 s 个阵列中至少有 e_s 个列，但又至多有 e'_s 个列，它们中的任意列都有相同的数（$1 \leqslant s \leqslant m$）的全排列 ϕ 的个数。

由于 $f_{t_1,\cdots,t_m}$ 在阵列（1）中的计算方法并不适用于阵列（20），从而导致 $f_{t_1,\cdots,t_m}$ 在阵列（20）中的显式计算公式很难获得，关于这一点可以参阅文献［5］，本文未能得到问题Ⅱ的显式计数公式，仅仅得到 $\delta_s = 1(1 \leqslant s \leqslant m)$ 对应的问题Ⅰ的显式计数公式，即式（9），我们将在后续的研究中尝试寻求 $f_{t_1,\cdots,t_m}$ 在阵列（20）中的显式计算公式的方法。

参考文献：

［1］　魏万迪. 限位排列和 k—积和式［J］. 应用数学学报，1983，6(2)：177－182.
WEI W D. Permutations with restricted positions and k-permanent［J］. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，1983，6(2)：177－182.

［2］　张福基，张遴贤，林治勋. 限位排列的一个图论方法［J］. 应用数学学报，1983，6(2)：240－246.
ZHANG F J，ZHANG L X，LIN Z X. A method of graph theory for restricted permutations［J］. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，1983，6(2)：240－246.

［3］　魏万迪. 广容斥原理及其应用［J］. 科学通报，1980，25(7)：296－299.
WEI W D. A generalized principle of inclusion-exclusion and its applications［J］. Chinese Science Bulletin，1980，25(7)：296－299.

［4］　万宏辉. 容斥原理的拓广及其应用［J］. 科学通报，1984，29(16)：972－975.
WAN H H. A generalized principle of inclusion-exclusion and its applications［J］. Chinese Science Bulletin，1984，29(16)：972－975.

［5］　STANLEY R P. Enumerative combinatorics：Volume 1［M］. Cambridge：Cambridge University Press，1997.

［6］　唐保祥，任韩. 3 类特殊图完美匹配数的计算公式［J］. 中山大学学报(自然科学版)，2017，56(3)：36－40.
TANG B X，REN H. The counting formula of the perfect matchings of three types of special graphs［J］. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2017，56(3)：36－40.

［7］　唐善刚. 关于“容斥原理的拓广及其应用”的注记［J］. 山东大学学报(理学版)，2012，47(10)：64－69.
TANG S G. A note on “generalized principle of inclusion-exclusion and its application”［J］. J Shandong University (Natural Science)，2012，47 (10)：64－69.

［8］　唐善刚. 广义容斥原理及其应用［J］. 山东大学学报(理学版)，2009，44(1)：83－90.
TANG S G. Generalized principle of inclusion-exclusion and its application［J］. J Shandong University (Natural Science)，2009，44(1)：83－90.

[9] 唐善刚. 容斥原理的拓展及其应用［J］. 山东大学学报(理学版),2010, 45(12)：12－15.
TANG S G. A generalization of principle of inclusion-exclusion and its application［J］. J Shandong University (Natural Science), 2010, 45(12)：12－15.

[10] 唐善刚. 容斥原理的拓展及其应用(Ⅱ)［J］. 山东大学学报(理学版), 2011, 46(12)：70－75.
TANG S G. A generalization of principle of inclusion-exclusion and its application (Ⅱ)［J］. J Shandong University (Natural Science), 2011, 46(12)：70－75.

[11] 曹汝成. 广义容斥原理及其应用［J］. 数学研究与评论,1988, 8(4)：526－530.
CAO R C. A generalized principle of inclusion-exclusion and its applications［J］. J Mathematical Research and Exposition, 1988, 8(4)：526－530.

[12] 唐善刚. 赋权有限集上的容斥原理及应用［J］. 浙江大学学报(理学版),2014, 41(2)：123－126.
TANG S G. A principle of inclusion-exclusion on a weighted finite set and its applications［J］. J Zhejiang University (Science Edition), 2014, 41(2)：123－126.

[13] BENDER. E A, GOLDMAN J R. On the applications of mobius inversion in combinatorial analysis［J］. Amer Math Monthly, 1975, 82(8)：789－803.

[14] 唐保祥,任韩. 有限集合上封闭集族的计数［J］. 中山大学学报(自然科学版),2010, 49(6)：11－14.
TANG B X,REN H. Enumeration of closed family of finite sets［J］. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2010,49(6) ：11－14.

[15] 韩士安,林磊. 近世代数［M］. 北京：科学出版社, 2004.

[16] 李磊. 关于几个组合计数公式的推广［J］. 工程数学学报,1996,13(4) ：95－98.
LI L. Generalization of some combinatorial formulas［J］. J Engineering Mathematics,1996,13(4)：95－98.